جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحان مقرر نظرية الشبكات
لطلاب السنة الرابعة رياضيات – شعبة الجبر
الفصل الأول للعام الدراسي 2018/2017

اسم الطالب :
المدة : ساعة ونصف
العلامة : 100

السؤال الأول : (20 علامة)

1) أ) إذا كانت $A = Q \cap [1, \sqrt{3}]$ مجموعة جزئية من $(Q, \leq)$ فهل تملك A حد أعلى وحد أعلى أصغري في Q ؟ (اذكرهما إن وجدا).

ب) إذا كانت $E = \{2, 5, 6, 25\}$ مرتبة بعلاقة يقسم . فهل تملك عناصر أعظمية وعنصر أكبر ؟ (اذكرهم إن وجدوا)

ت) إذا كان $f : E \to F$ ايزومورفيزم ترتيب وإذا كانت $A \subseteq E$ تملك حد أعلى أصغري S في E ، فاثبت أن $f(A)$ تملك عندئذ حد أعلى أصغري في F هو $f(S)$ أي أن

$$f(sup_E A) = sup_F(f(A))$$

السؤال الثاني : (17 علامة)

ليكن f تطبيق من نصف الشبكة العليا E في نصف الشبكة العليا F ، فاثبت أن الشرط اللازم والكافي كي يكون f $\vee$ –ايزومورفيزم هو أن يكون f ايزومورفيزم ترتيب .

السؤال الثالث : (18 علامة)

أ) نعرض أن $E = \{a, b, c\}$ فإن $(P(E), \subset)$ تشكل شبكة ، عين جميع فوق المرشحات فيها .

ب) نقول عن المرشحة F في الشبكة E أنها أولية إذا كان $x \vee y \in F$ فإن $x \in F$ أو $y \in F$.اثبت أنه في الشبكة التوزيعية كل فوق مرشحة تكون مرشحة أولية .

السؤال الرابع : (20 علامة)

أ) لتكن E مجموعة غير خالية و f تطبيق من الشبكة $(P(E), \subseteq)$ في الشبكة $(P(E), \subseteq)$ معرف بالشكل التالي : $\forall X \in P(E)$ فإن $f(X) = X \cup X_0$ حيث X_0 مجموعة جزئية غير خالية ثابتة من E ، فهل f مورفيزم بولياني ولماذا ؟

ب) لتكن A حلقة بوليانية و I مثالية فيها ، فاثبت أن I هي مرشحة في A

السؤال الخامس : (25 علامة)

ن A جبر بولياني و a و b عنصرين ثابتين في A وإذا كان $b \leq a$ ، فاثبت أن حلول المعادلة السابقة $b = a$ ... لى بالشكل $b \leq x \leq a + b + 1$ ، ثم حل المعادلة $35x + 7 = 0$ في الشبكة $(D(210), |)$.

ص في 2018/1/31

د . عصام تسيم

سلم تصحيح مقرر نظرية الشبكات
لطلاب السنة رابعة رياضيات - جبر
الفصل الأول للعام الدراسي ٢٠١٧/٢٠١٨

السؤال الأول: [20]

أ) تملك A حدود عليا مثل 3 و 4 (2) ولكنها لا تملك حداً أعلى أصغري.

ب) 6 ، 25 هما عنصران أعظميان في E ولكن E لا تملك عنصراً أكبر (2) (2)

جـ) - لتكن $x' \in f(A)$ ⇐ توجد $x \in A$ بحيث يكون $x' = f(x)$ ولكن $x \le S$ ⇐
$x' = f(x) \le f(S)$ ⇐ $f(S)$ حد أعلى للمجموعة $f(A)$ في F (6)

- لتكن m' حد أعلى للمجموعة $f(A)$ في F ⇐ يوجد $m \in E$ بحيث يكون $m' = f(m)$
فمن أجل أي $x \in A$ فإن $f(x) \le m' = f(m)$ ⇐ $x \le m$ ⇐ m حد أعلى للمجموعة A
⇐ $S \le m$ ⇐ $f(S) \le f(m) = m'$ أي أن $f(S)$ هي حد أعلى أصغري (6)
للمجموعة $f(A)$ في F.

السؤال الثاني: [17]

- بفرض أن f V - إيزومورفيزم من E على E' فهذا يعني أن f تقابل
ومتزايد لنبين أن f^{-1} متزايد وذلك لأن:

$$f(x) \le f(y) \Rightarrow f(x) \vee f(y) = f(y) \Rightarrow f(x \vee y) = f(y) \Rightarrow x \vee y = y$$
$$\Rightarrow x \le y \quad (9)$$

- العكس: بفرض أن f إيزومورفيزم ترتيب ⇐ f يحافظ على الحدود العليا
الأصغرية ومنه

$$f(\sup_E \{x, y\}) = \sup_{E'} f(\{x, y\}) = \sup_{E'} \{f(x), f(y)\}$$

أي أن

$$f(x \vee y) = f(x) \vee f(y) \quad (8)$$

السؤال الثالث: [18]

أ) الشبكة $\mathcal{P}(E)$ تملك ثلاثة فوعد مرشحات هي:

(3) $F_1 = \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$

(3) $F_2 = \{\{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$

(3) $F_3 = \{\{c\}, \{b, c\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$

ب) بفرض أن E شبكة توزيعية وأن F غير معدوم ومرشحة فيها وليكن

$x\vee y\in F$ ولنفرض جدلاً أن F ليست أولية أي أن $x\notin F$ & $y\notin F$

بحسب مبرهنة اذا كان $x\notin F$ يوجد $x_1\in F$ بحيث يكون $x\wedge x_1=0$

$$F\ni x_1\wedge(x\vee y) = (x_1\wedge x)\vee(x_1\wedge y) = 0\vee(x_1\wedge y) = x_1\wedge y\in F$$ (5)

وهذا تناقض لأن $x_1\wedge y\notin F$ ⇐ F مرشحة & $x_1\wedge y\le y$ & $y\notin F$

فالفرض الجدلي خاطئ أي أنه يجب أن يكون إما $x\in F$ أو $y\in F$ وبالتالي فإن F أولية. (4)

السؤال الرابع: 20

أ) $\forall X,Y\in \mathcal{P}(E)$ فإن

$$f(X\cup Y) = X\cup Y\cup X_0 = (X\cup X_0)\cup(Y\cup X_0) = f(X)\cup f(Y)$$

$$f(X\cap Y) = (X\cap Y)\cup X_0 = (X\cup X_0)\cap(Y\cup X_0) = f(X)\cap f(Y)$$

$$f(E) = E\cup X_0 = E$$ (5)

$$f(\phi) = \phi\cup X_0 = X_0$$

$$f(\complement X) = \complement X\cup X_0$$

$$\complement f(X) = \complement(X\cup X_0) = \complement X\cap\complement X_0$$

$$\Rightarrow f(\complement X)\neq \complement f(X)$$ (5)

وبالتالي فإن f مورفيزم شبكة ولكنه ليس مورفيزم بولياني.

ب) لتكن I مثالية في A وليكن $x\in I'$ & $y\ge x$ ⇐ $x'\in I$ & $y'\le x'$ & I مثالية

⇐ $y'\in I$ ⇐ $y\in I'$ (5)

• لتكن $x\in I'$ & $y\in I'$ ⇐ $x'\in I$ & $y'\in I$ ⇐ $x'\vee y'\in I$ ⇐

$(x\wedge y)'\in I$ ⇐ $x\wedge y\in I'$ ومنه فإن I' تكون مرشحة في A. (5)

حل السؤال الخامس: 25

بما أن المعادلة $ax+b=0$ تكتب بالشكل $ax=b$ فإن $x \geq ax=b$

أي أن $x \geq b$ (5)

كما أن:

$(a+b+1)x = ax+bx+x = ax+b+x = 0+x = x$ (5)

ومنه $x \leq a+b+1$

ومنه نستنتج $b \leq x \leq a+b+1$

$D(210)=\{1, 2, 3, 6, 7, 10, 14, 15, 21, 30, 35, 42, 70, 105, 210\}$

ان حلول المعادلة $35x+7=0$ يعطى بالعلاقة: (5)

$7 \leq x \leq 35+7+210 \Rightarrow 7 \leq x \leq 35+30 \Rightarrow$ (5)

$7 \leq x \leq (35\cdot 30')\vee(35'\cdot 30) \Rightarrow 7 \leq x \leq (35\cdot 7)\vee(6\cdot 30) \Rightarrow$

$7 \leq x \leq 7\vee 6 \Rightarrow 7 \leq x \leq 42$

$x \in \{7, 14, 42\}$ (5)

د. عصام دنيسم